Devoirs de vacances :
Terminale $\longrightarrow$ MPSI Jean Moulin

1 Exercices de calcul :

Exercice 1 :

Classer les entiers suivants : $2^{2^{2^3}}$ $2^{2^{3^2}}$ $2^{3^{2^2}}$ $3^{2^{2^2}}$

Exercice 2 :

1. Qui est le plus petit ? $\sqrt{5}+\sqrt{10}$ ou $\sqrt{29}$?
2. Si $\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{4}{5}$, que vaut $\dfrac{a}{d}$?

Exercice 3 :

Trouver l'intrus :

a. $\dfrac{1-\sqrt{2}}{-3+2\sqrt{2}}$ b. $1+\sqrt{2}$ c. $\dfrac{7+5\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$ d. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Exercice 4 :

Trouver l'intrus :

a. $\dfrac{9+3i}{1+2i}$ b. $\dfrac{5+i}{1+i}$ c. $\dfrac{-4+7i}{-2+i}$.

Exercice 5 :

Soient x et y deux réels strictement positifs. On définit a et b par :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}} \text{ et } \frac{1}{b}=\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

1. Donner une expression simple de $a+b$.
2. Exprimer x et y à l'aide de a et b.

Exercice 6 :

Développer $(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)$.

Exercice 7 :

Montrer que : $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1+3}{5+7}=\dfrac{1+3+5}{7+9+11}=\cdots$.

Exercice 8 :

On appelle $n^{\text{ième}}$ *nombre triangulaire* et on note t_n le nombre $t_n=1+2+\ldots+n$.

1. Est-il vrai que la somme des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est un nombre triangulaire ?
2. Pour n entier naturel, on pose $S_n=1+9+9^2+\ldots+9^n$.
   S_n est-il toujours un nombre triangulaire ?

Exercice 9 :

Une calculatrice ne possède que trois opérations : addition, soustraction et inverse.
Peut-on calculer le produit de deux nombres ?

Exercice 10 :

Un sac contient une boule qui est soit noire soit blanche, avec équiprobabilité.
On ajoute une boule blanche dans le sac puis on tire au hasard : on obtient une boule blanche.
On la remet dans le sac et on procède à un nouveau tirage : quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

2 Une étude de fonction à paramètre :

Exercice 11 :

Soit $a\geqslant 0$ et f_a la fonction définie par $f_a(x)=\dfrac{ln(x)}{x^2-a^2}$.

1. Déterminer en fonction de a, l'ensemble de définition de f_a.
2. Calculer $f_a'(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition.
3. On considère la fonction g_a définie sur $]0;+\infty[$ par $g_a(x)=x^2-a^2-2x^2ln(x)$.

(a) Déterminer les variations de g_a en fonction de a.

(b) Montrer que g_a est toujours négative si $a > 1$.

(c) En déduire les variations de f_a dans ce cas.

(d) Montrer que si $a < 1$, $g_a(x) = 0$ admet deux solutions distinctes, nommées α et β avec $\alpha < \beta$.

(e) En déduire les variations de f_a si $a < 1$.

4. Dans cette question, on pose $a = 1$.

   (a) Tracer la courbe de f_1. Quel semble être son ensemble de définition ? Sa monotonie ?

   (b) Déterminer la limite de f_1 en $x = 1$.

3 Problèmes ouverts :

Le principe des exercices suivants, est de vous entraîner à chercher (organiser votre recherche, théoriquement et temporellement, persévérer,...), mais pas forcément de vous amener à une solution ! L'important (bizarrement) est de chercher, pas de trouver...

Exercice 12 :

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier multiple de 2^n qui ne s'écrit qu'avec des "1" et des "2".
   (indication : on pourra construire une suite de tels multiples à n chiffres)

2. Montrer que le résultat est encore valable si on utilise un chiffre pair et un chiffre impair.

Exercice 13 :

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1) \times 2n}$.

1. Implémenter un algorithme en Python qui détermine S_n pour n donné.

2. Déterminer à l'aide de l'algorithme, les valeurs de S_n pour $n = 100$ puis $n = 1000$.

3. Comparer les valeurs obtenues à $ln(2)$. Que peut-on conjecturer ?

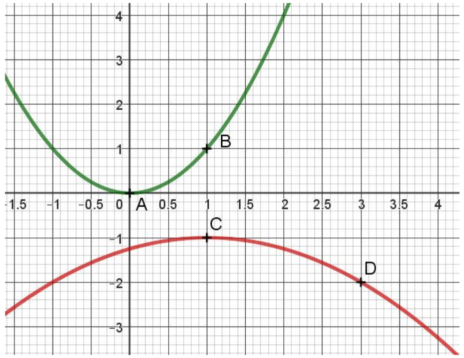
4. ($\star$) Démontrer la conjecture obtenue à la question précédente.

Exercice 14 :

Déterminer s'il existe un ou plusieurs polynômes du second degré dont la courbe passe par les points $A\left(1; -\frac{25}{6}\right)$, $B\left(2; -\frac{23}{3}\right)$ et $C\left(-1; \frac{35}{6}\right)$?

Exercice 15 :

On considère deux paraboles dont les courbes sont les suivantes :



Existe-t-il une(des) tangente(s) commune(s) aux deux courbes ?

Exercice 16 :

On considère un ensemble de points du plan, tous distincts.

1. Existe-t-il une droite laissant autant de points de part et d'autre de celle-ci ?

2. Si oui, comment la définir ?

3. En existe-t-il plusieurs ? Si oui, combien ?

Exercice 17 :

1. Si $n!$ est défini par $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, pour $n \in \mathbb{N}$, avec $0! = 1$, alors on note u_n le nombre de 0 qui terminent l'écriture décimale de $n!$.
   Exprimer u_n en fonction de n ?

2. (a) La somme de deux suites arithmétique est-t-elle encore arithmétique ?
   (b) Même question avec le produit.
   (c) Mêmes questions avec des suites géométriques.

Exercice 18 :

1. Combien de points d'intersection peut-on avoir si on trace 6 droites dans un plan ?

2. Même question si les droites sont tracées sur une sphère.